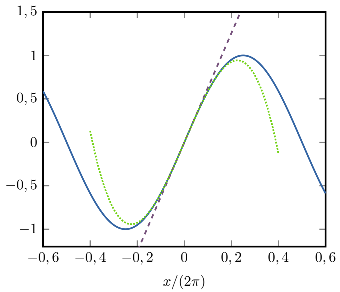
Développements limités (pour physicien·ne·s)

I Introduction

On peut rencontrer en physique des fonctions compliquées à manipuler. On souhaitera alors en obtenir une expression approchée par une fonction plus simple. La plupart du temps, on approximera la fonction, au voisinage d'un point précis par un polynôme de degré n : on réalise alors un *développement limité d'ordre n* (noté DL par la suite) de la fonction f.

Graphiquement, un développement limité d'ordre 1 correspond à approximer, au voisinage d'un point, la fonction par sa tangente, un DL d'ordre 2 par une parabole…. La figure ci-contre illustre cette interprétation sur l'exemple de la fonction sinus (représentée par la courbe en traits pleins). On a tracé également la courbe représentative de son DL à l'ordre 1 pour $x \ll 1$ ($y = x$) (courbe en traits interrompus cours) et à l'ordre 3 pour $x \ll 1$ ($y = x - x^3/6$) (courbe en pointillés).



On constate que ces courbes sont proches du sinus pour peu qu'on ne regarde pas trop loin de l'origine $x = 0$. On vérifie ainsi qu'un DL n'est valable qu'au voisinage d'un point particulier : les deux DL commencent à être assez éloignés de la courbe en $\pi/2$ par exemple.

Enfin, on peut constater que le domaine de pertinence du DL d'ordre 3 semble plus étendu que celui du DL d'ordre 1. Il « colle » à la courbe de sinus plus loin de 0.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions toujours suffisamment dérivables et continues. Les démonstrations rigoureuses des résultats affirmés et illustrés dans la suite seront vues en cours de mathématiques.

II Détermination

L'équation du DL d'ordre 1 en x_0 découle directement de la définition de la dérivée en un point d'une fonction $f(x)$. On a :

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

La tangente à f en x_0 a par ailleurs pour équation : $t_{x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Si on pose $A_{x_0}(x) = f(x) - t_{x_0}(x)$, l'équation 1 assure alors que : $\lim_{x\to x_0} \frac{A_{x_0}(x)}{x-x_0} = 0$.

C'est cette propriété qui caractérise le DL d'ordre n d'une fonction. Le polynôme $P_n(x)$ d'ordre n réalise un DL d'ordre n de la fonction f au voisinage de x_0 si la différence entre $f(x)$ et $P_n(x)$ tend vers 0 quand $x \to x_0$ plus vite que $(x - x_0)^n$, *ie* $f(x) - P_n(x) \ll (x - x_0)^n$ au voisinage de x_0.

On montre que, si la fonction f est n-dérivable, le polynôme :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \tag{2}$$

(avec $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$), est un DL d'ordre n de f au voisinage de x_0 et qu'il est unique. On peut donc parler *du* DL d'une fonction. On notera en physique :

$$f(x) \simeq P_n(x), \tag{3}$$

mais en prenant soin de préciser dans le texte qu'il s'agit d'un DL à l'ordre n.

III Propriétés des DL

parité Si la fonction est paire (resp. impaire), le polynôme l'est également et ne comporte donc que des puissances paires (impaires) de x.

somme Le DL d'ordre n de $f + g$ au voisinage de x_0 est la somme des DL d'ordre n de f et de g[i].

produit Le DL d'ordre n de $f \times g$ au voisinage de x_0 est le produit des DL d'ordre n de f et de g, *tronqué au terme de degré n*. Le produit de deux DL d'ordre 3 peut être un polynôme d'ordre 6, il ne fournit cependant pas un DL d'ordre 6 de $f \times g$.

DL d'une fonction composée Si P_n et R_n sont les DL de f et g au voisinage respectivement de $g(x_0)$ et x_0, le DL d'ordre n de $f \circ g$ (définie par $f \circ g(x) = f(g(x))$) au voisinage de x_0 est donné par $P_n \circ R_n$, dont on ne garde que les termes d'ordre inférieur ou égal à n.

IV Dérivation et intégration

Dans les cas très fréquents où la fonction f dont on a déterminé un développement limité est dérivable et intégrable, sa dérivée f' et une primitive F admettent elles-aussi des développement

[i] Attention à ne pas utiliser un DL d'ordre 5 d'une fonction et d'ordre 4 d'une autre fonction pour obtenir un DL d'ordre 5 de leur somme, et à ne pas utiliser des DL en différents points.

limités, qu'on obtient simplement par dérivation et intégration du développement limité de f. En notant P_n le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0, on a ainsi :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{à l'ordre } n-1 \text{ pour x proche de } x_0$$

et :

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} P_n(x)\mathrm{D}x \quad \text{à l'ordre } n+1 \text{ pour x proche de } x_0$$

V Exemples

À partir de l'expression de la dérivée d'ordre n de sin (resp. cos), on vérifie que :

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \text{à l'ordre 6 pour } x \ll 1 \tag{4}$$

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{à l'ordre 5 pour } x \ll 1. \tag{5}$$

De la même manière,

$$\exp(x) \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{à l'ordre 3 pour } x \ll 1, \tag{6}$$

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 \quad \text{à l'ordre 2 pour } x \ll 1, \tag{7}$$

$$\text{et en particulier[ii]} \quad \frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + x^3 \quad \text{à l'ordre 3 pour } x \ll 1. \tag{8}$$

On peut également retrouver ce dernier résultat en remarquant que, pour tout n : $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i$ soit : $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i$ à l'ordre n pour $x \ll 1$.

Pour illustrer les propriétés sur le produit, on peut calculer le DL de $\sin(2x)/2 = \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 3. On a ainsi :

$$\frac{\sin(2x)}{2} = \sin(x)\cos(x) \simeq (x - \frac{x^3}{6})(1 - \frac{x^2}{2}) \tag{9}$$

$$\simeq x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12}, \tag{10}$$

dont on ne doit garder que les termes d'ordre inférieur à 3, soit :

$$\sin(x)\cos(x) \simeq x - \frac{2x^3}{3} \quad \text{à l'ordre 3 pour } x \ll 1. \tag{11}$$

On vérifie que ce DL coïncide bien avec celui de $\sin(2x)/2$:

$$\frac{\sin(2x)}{2} \simeq 1/2\left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) = x - \frac{2x^3}{3}. \tag{12}$$

Pour établir cette relation, on a utilisé le DL d'une fonction composée dans le cas trivial où l'une des foncions ($x \to 2x$) est un polynôme, égal à son DL. Dans un cas plus compliqué, le DL de $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 3 pour $x \ll 1$ par exemple, on utilise les DL de exp et sin pour $x \ll 1$[iii]. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &\simeq 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{6}\\ &\simeq 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\\ &\simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{à l'ordre 3 pour } x \ll 1.\end{aligned}$$

On établit le DL de $\ln(1-x)$ pour $x \ll 1$ en utilisant la technique d'intégration des DLs :

$$\ln(1-x) - \ln(1) = \int_0^x \frac{-1}{1-x}\mathrm{D}x$$

Avec le DL de $\frac{1}{1-x}$ précédemment établit on en déduit :

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \sum_{i=0}^{n} x^i \mathrm{D}x = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{i} \quad \text{à l'ordre } n+1 \text{ pour } x \ll 1.$$

[iii] le cas est simple ici car $\sin(0) = 0$, dans le cas du DL de $\exp(\cos(x))$ pour $x \ll 1$, il faudrait utiliser le DL de cos pour $x \ll 1$ et celui de exp au voisinage de $\cos(0) = 1$.